

# Aula 05

## Modelagem Matemática de Sistemas - Caixa-Preta

**Disciplina:** Laboratório de Engenharia de Controle  
**Professor:** Rafael Cavalcanti Neto

# Objetivos

- Modelo caixa-preta
- Método de Sundaresan
- *System Identification Toolbox*



# Modelo Caixa-Preta

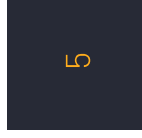


# Modelo Caixa-Preta

- **Modelo Caixa-Preta:** Modelagem que se pauta no na teoria de identificação de sistemas.
- **Processo de modelagem:**
  - Obtenção de um conjunto de amostras referentes a um sinal de entrada e um sinal de saída;
  - Utilizar algum método de obtenção de modelo a partir dos sinais indicados no item anterior;
  - Simulação e experimento para comprovação de funcionamento.

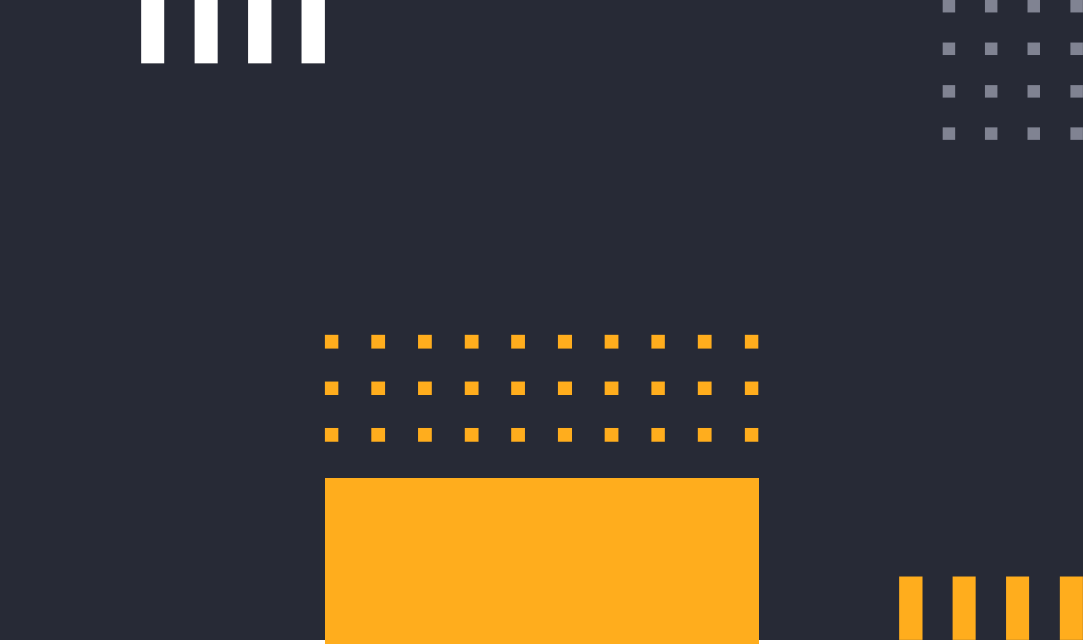
# Modelo Caixa-Preta

Exemplos:



# Modelo Caixa-Preta

- Alguns métodos que podem ser utilizados para obtenção da função de transferência de um sistema de caixa-preta:
  - ▣ Método de Sundaresan;
  - ▣ MATLAB – *System Identification Toolbox*.



# Método de Sundaresan



# Método de Sundaresan

- Quando usar?
- Este método pressupõe que o sistema em questão pode ser aproximado satisfatoriamente por funções de transferência de segunda ordem do tipo:

$$H(s) = \frac{e^{-\tau_d s}}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \quad (1)$$

ou

$$H(s) = \frac{e^{-\tau_d s} \cdot \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (2)$$

# Método de Sundaresan

$$H(s) = \frac{e^{-\tau_d s}}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$$

Caso  
sobreamortecido

$\tau_d \rightarrow$  Atraso puro;  
 $\tau_1 \rightarrow$  Constante de  
tempo fixa;  
 $\tau_2 \rightarrow$  Constante de  
tempo fixa.

$$H(s) = \frac{e^{-\tau_d s} \cdot \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Caso  
subamortecido

$\tau_d \rightarrow$  Atraso puro;  
 $\zeta \rightarrow$  Coeficiente de  
amortecimento;  
 $\omega_n \rightarrow$  Frequência  
natural do  
sistema.

# Método de Sundaresan

- **Objetivo?**

- Determinar os parâmetros  $\tau_d$ ,  $\tau_1$  e  $\tau_2$  ou  $\tau_d$ ,  $\zeta$  e  $\omega_n$  da respectiva função de transferência, a partir de uma resposta ao degrau.

$$H(s) = \frac{k \cdot e^{-\tau_d s}}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$$

**Caso sobreamortecido**

$$H(s) = \frac{k \cdot e^{-\tau_d s} \cdot \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

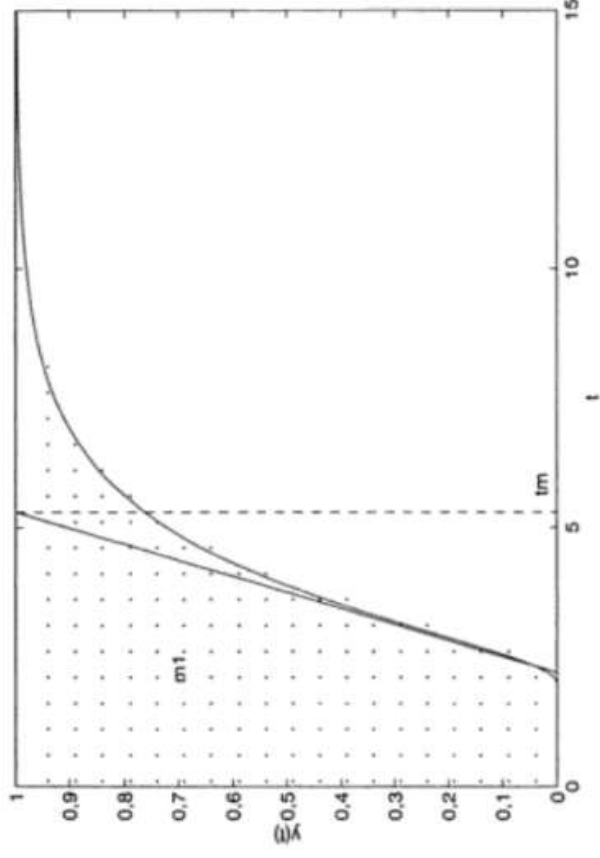
**Caso subamortecido**

- **OBS.:** Observar que o ganho do processo foi adicionado aos modelos acima.

# Método de Sundaresan (Caso Sobreamortecido)

# Método de Sundaresan – Caso Sobreamortecido

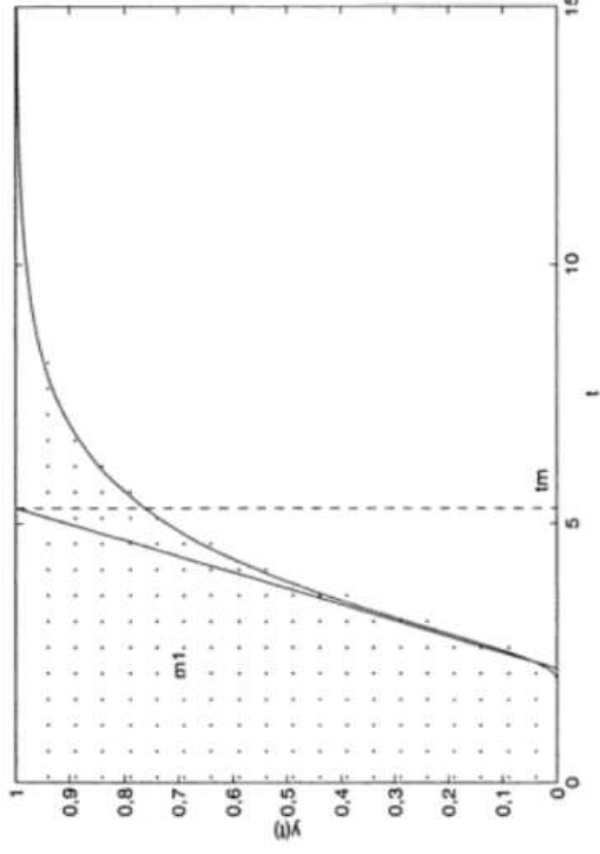
- Uma resposta ao degrau típica de sistemas sobreamortecidos é mostrada ao lado.
- Degrau de entrada unitário aplicada em  $t = 0$ .



# Método de Sundaresan – Caso Sobreamortecido

- Segundo Aguirre (2000), a área hachurada na figura ao lado é um parâmetro importante da função resposta  $y(t)$ . Esta área é calculada por:

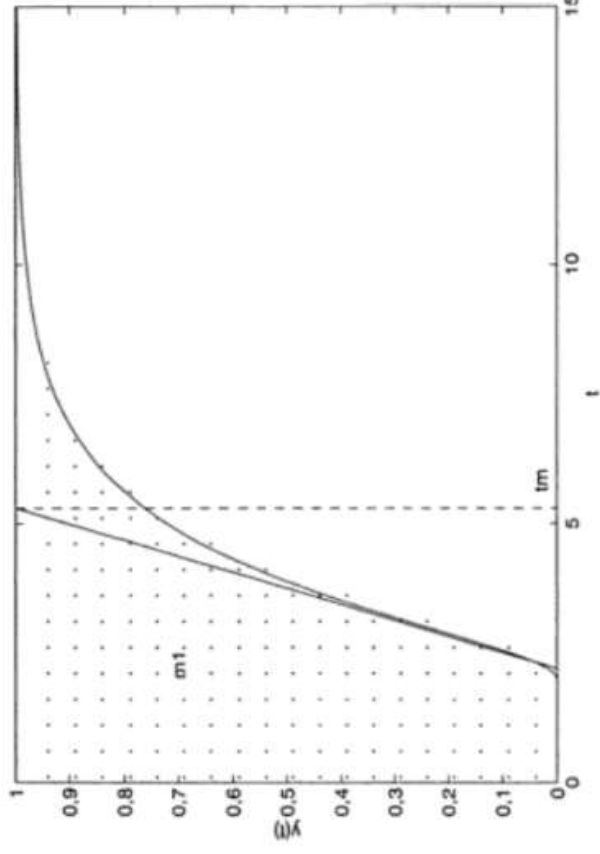
$$m_1 = \int_0^{\infty} (1 - y(t)) dt$$



# Método de Sundaresan – Caso Sobreamortecido

- Ainda segundo Aguirre (2000), a função de transferência  $H(s)$  e  $m_1$  estão relacionados pela seguinte definição:

$$m_1 = -\left. \frac{dH(s)}{ds} \right|_{s=0} = \tau_d + \tau_1 + \tau_2 \quad (3)$$



## Método de Sundaresan – Caso Sobreamortecido

- A resposta da Equação (1) ao degrau é dada por:

$$y(t) = \left[ 1 - \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t-\tau_d}{\tau_1}} + \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t-\tau_d}{\tau_2}} \right] u(t - \tau_d), \quad (4)$$

sendo que  $u(t - \tau_d)$  é um degrau unitário começando no instante  $\tau_d$ .

- Igualando-se a derivada de segunda ordem de (3) a zero, obtêm-se o ponto de inflexão em:

$$t_i = \tau_d + \alpha \ln \eta, \quad (5)$$

sendo que  $\eta = \tau_1/\tau_2$  e  $\alpha = \tau_1\tau_2/(\tau_1 - \tau_2)$ .

# Método de Sundaresan – Caso Sobreamortecido

- A inclinação da reta tangente no ponto de inflexão é dada por:

$$M_i = \frac{\eta^{1/(1-\eta)}}{\alpha(\eta - 1)} \cdot \quad (6)$$

- Esta reta tangente intercepta o valor final de  $y(t)$  num ponto correspondente ao instante  $t_m$ , que é dado por:

$$t_m = \tau_d + \alpha \cdot \left[ \ln \eta + \frac{\eta^2 - 1}{\eta} \right] \quad (7)$$

# Método de Sundaresan – Caso Sobreamortecido

- Combinando as Equações (3), (6) e (7), obtém-se:

$$M_i(t_m - m_1) = \frac{\eta^{\frac{1}{1-\eta}}}{(\eta - 1)} \ln \eta. \quad (8)$$

- A Equação (8) ainda pode ser reescrita como  $\lambda = Xe^{-X}$ , em que:

$$\lambda = M_i(t_m - m_1) \quad (9)$$

e

$$X = \frac{\ln \eta}{\eta - 1} \quad (10)$$

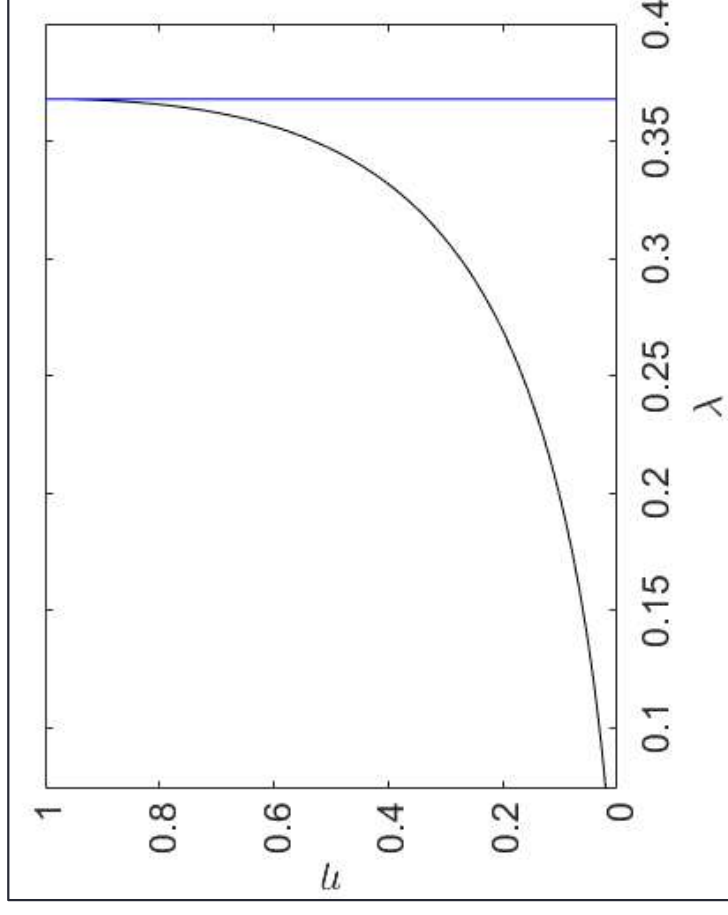
# Método de Sundaresan – Caso Sobreamortecido

- O máximo valor de  $\lambda$  é  $e^{-1}$  e ocorre quando o sistema é criticamente amortecido ( $\eta = 1$ ). O outro extremo ocorre quando  $\eta = 0$ , e neste caso o modelo se reduz a um de primeira ordem.

A figura ao lado mostra

a solução da equação

$$\lambda = Xe^{-x}.$$



# Método de Sundaresan – Caso Sobreamortecido

## ■ Portanto, o procedimento pode ser resumido da seguinte forma:

1. Determinar o ganho em regime permanente dividindo a variação do sinal de saída pela amplitude do degrau aplicado à entrada;
2. Fazer ajuste de ganho, *offset* e atraso do sinal de entrada;
3. Determinar a área sombreada que chamamos de  $m_1$ ;
4. Determinar a inclinação da tangente no ponto de inflexão de  $y(t)$ . Este valor é  $M_i$ ;
5. Determinar  $t_m$  que é a interseção da tangente com o valor em regime permanente de  $y(t)$ ;
6. Determinar  $\lambda$  a partir da equação:  $\lambda = M_i(t_m - m_1)$ ;
7. Determinar  $\eta$  a partir do gráfico apresentado no slide anterior;
8. Finalmente, determinar  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  e  $\tau_d$  como se segue:

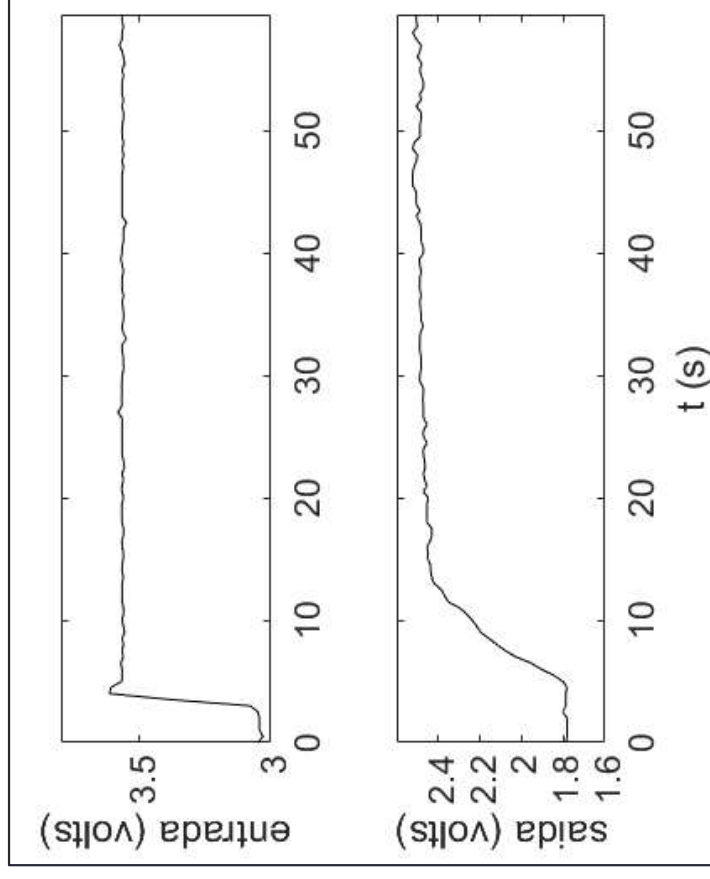
$$\tau_1 = \frac{\eta^{\eta/(1-\eta)}}{M_i}$$

$$\tau_2 = \frac{\eta^{1/(1-\eta)}}{M_i}$$

$$\tau_d = m_1 - \tau_1 - \tau_2$$

# Método de Sundaresan – Caso Sobreamortecido

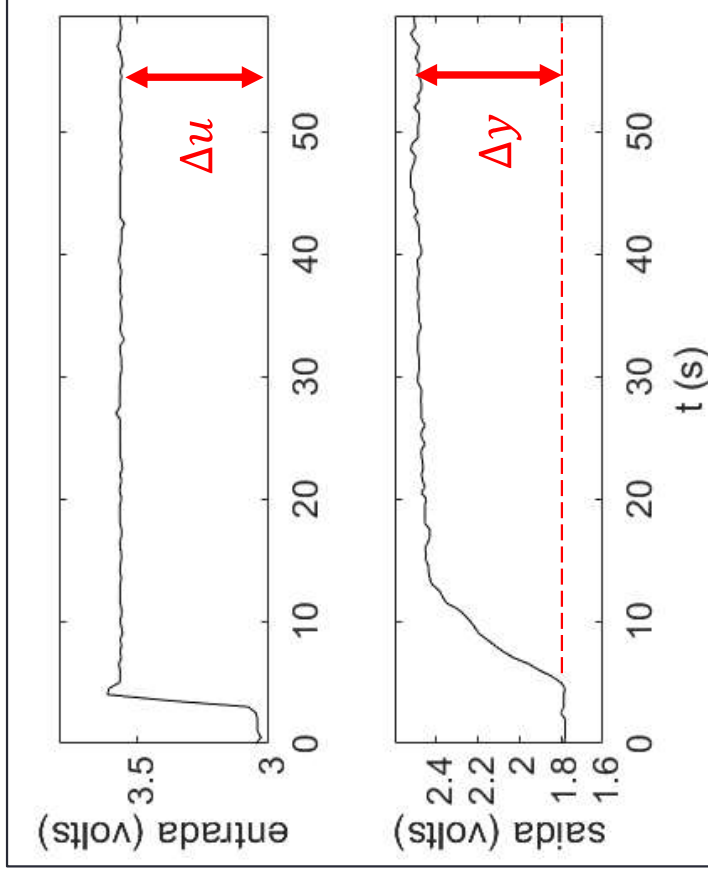
- **Exemplo:** Temos o conjunto de dados apresentado ao lado. Queremos utilizar o **Método de Sundaresan** para a estimação da função de transferência do sistema. Faremos utilizando sintonia manual dos parâmetros.



# Método de Sundaresan – Caso Sobreamortecido

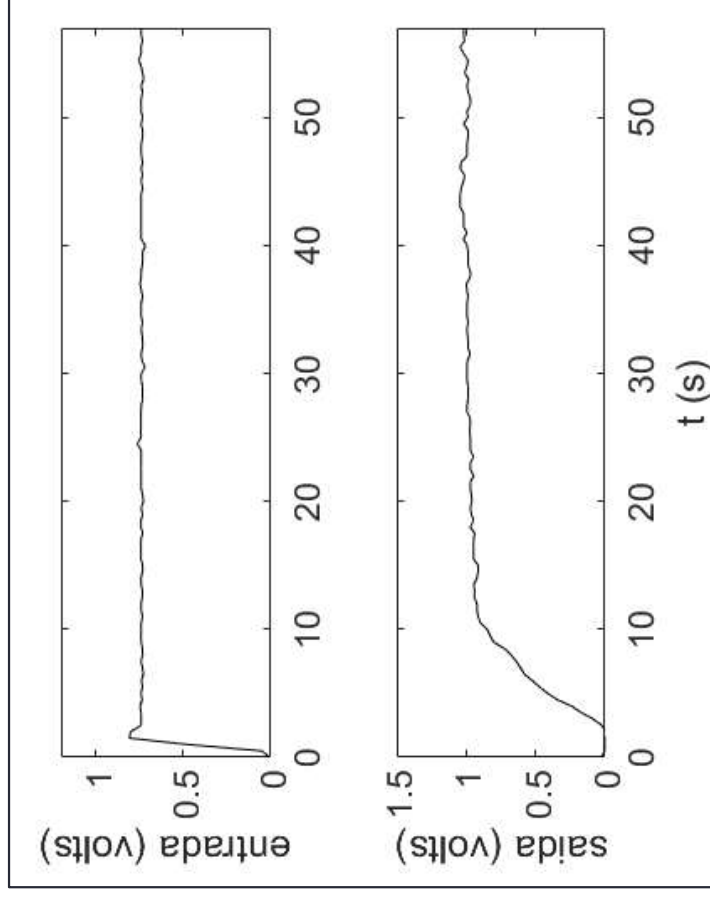
- **PASSO 1:** Determinação do ganho em regime permanente.

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta u}$$



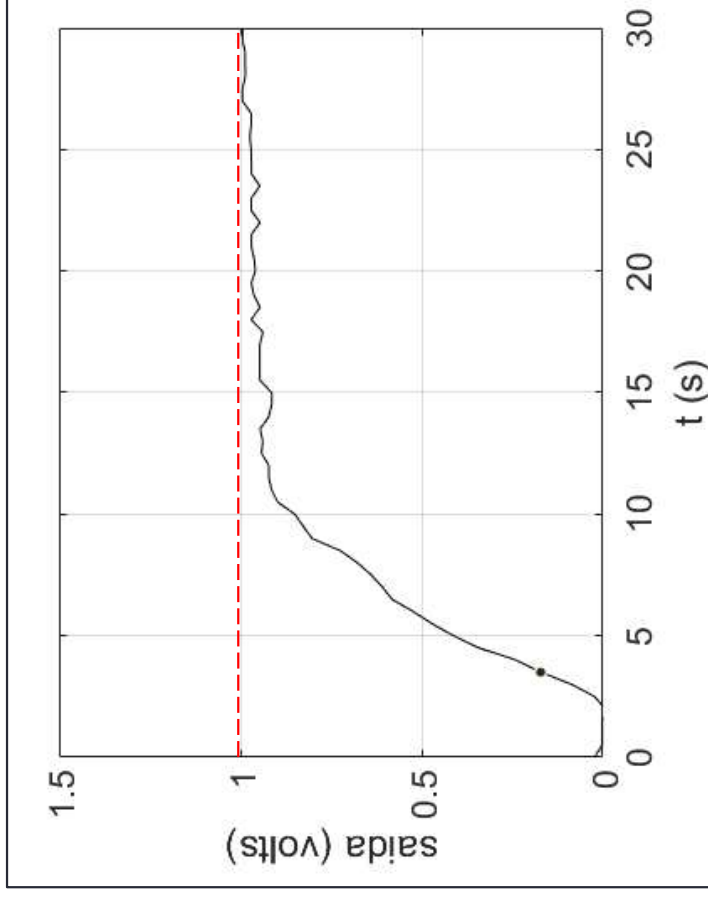
# Método de Sundaresan – Caso Sobreamortecido

- **PASSO 2:** Fazer ajuste de ganho, offset e atraso do sinal de entrada. O sinal de saída deve possuir valor unitário em regime permanente.



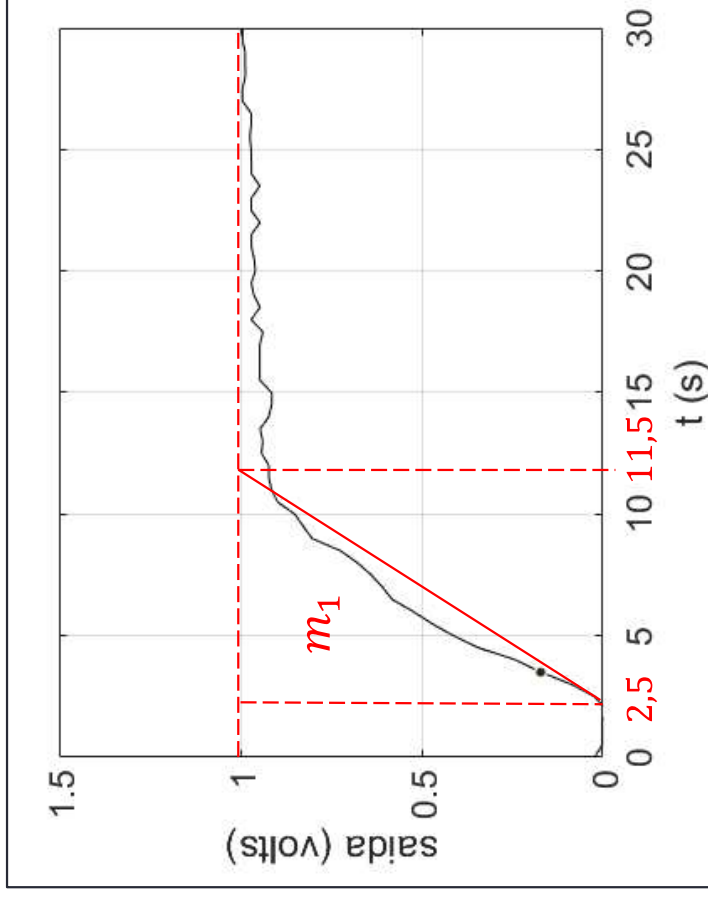
# Método de Sundaresan – Caso Sobreamortecido

- **PASSO 3:** Determinar a área sombreada que chamamos de  $m_1$ .



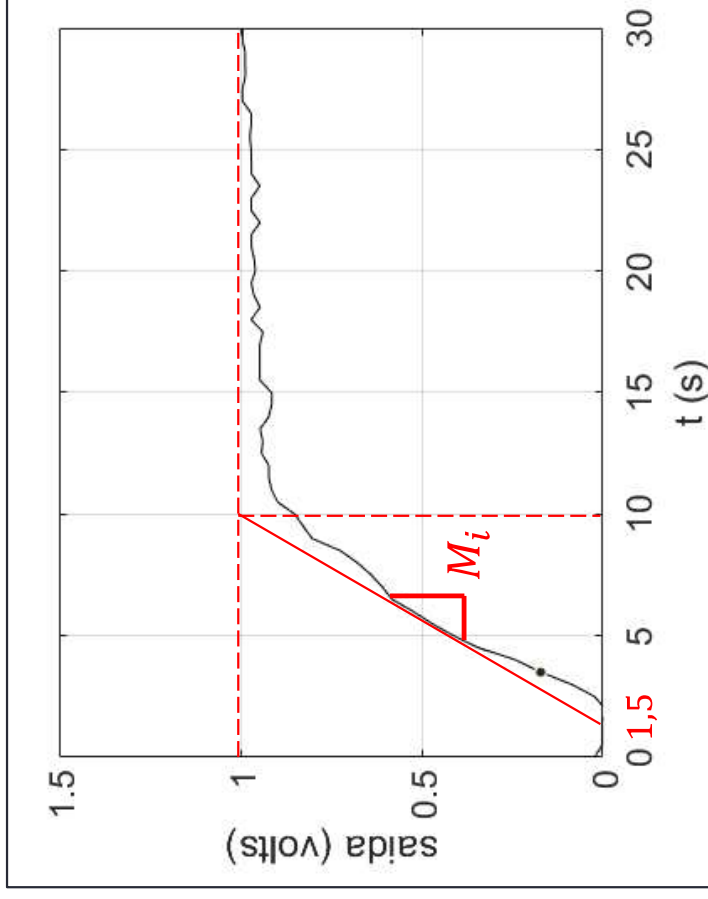
# Método de Sundaresan – Caso Sobreamortecido

- **PASSO 3:** Determinar a área sombreada que chamamos de  $m_1$ .



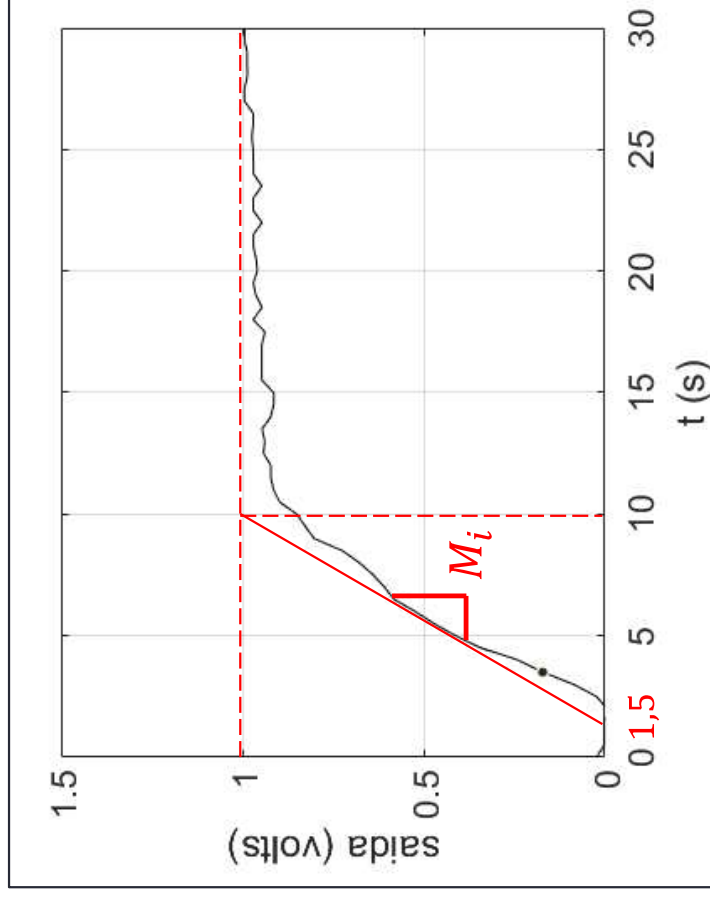
# Método de Sundaresan – Caso Sobreamortecido

- **PASSO 4:** Determinar o valor de  $M_i$ .



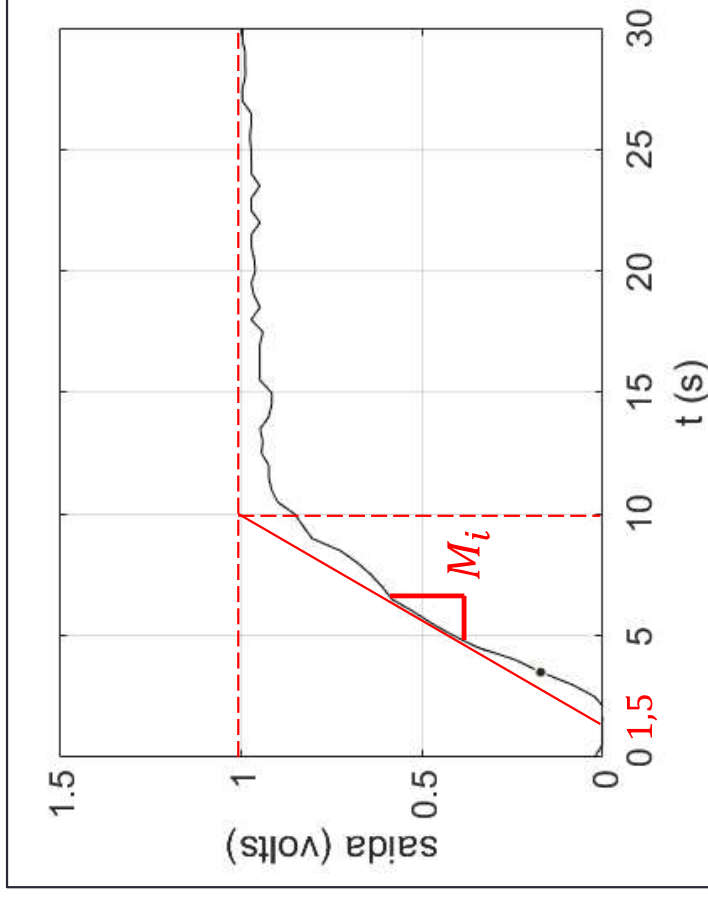
# Método de Sundaresan – Caso Sobreamortecido

- **PASSO 5:** Determinar o valor de  $t_m$ .



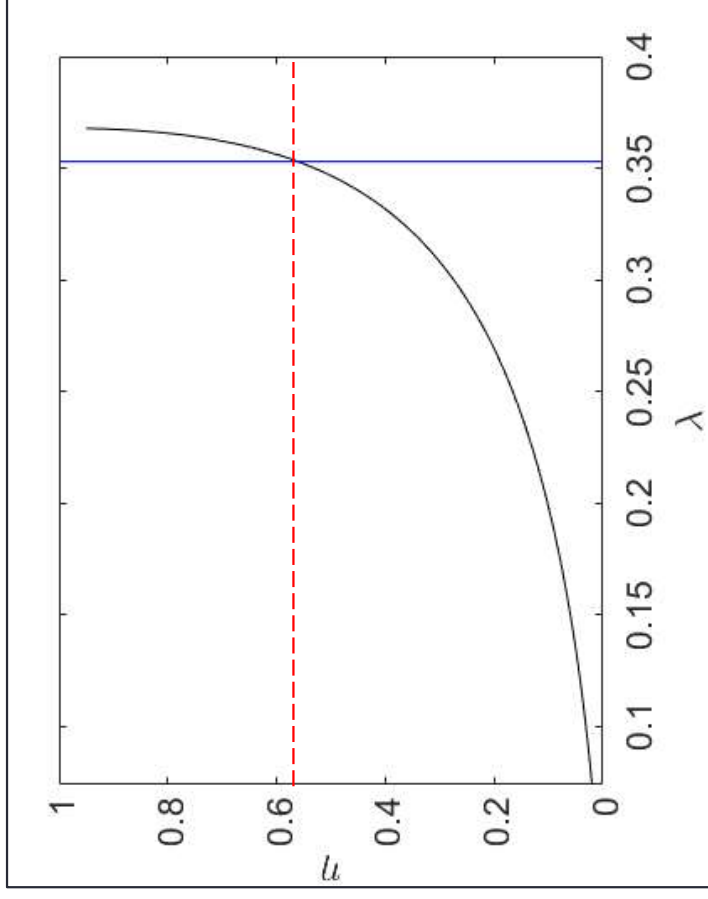
# Método de Sundaresan – Caso Sobreamortecido

- **PASSO 6:** Determinar  $\lambda$  a partir da equação:  $\lambda = M_i(t_m - m_1)$ .



# Método de Sundaresan – Caso Sobreamortecido

- **PASSO 7:** Determinar  $\eta$  a partir  $\lambda$ .



# Método de Sundaresan – Caso Sobreamortecido

- **PASSO 8:** Determinar  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  e  $\tau_d$ .

$$\tau_1 = \frac{\eta^{\eta/(1-\eta)}}{M_i}$$



$$\tau_2 = \frac{\eta^{1/(1-\eta)}}{M_i}$$



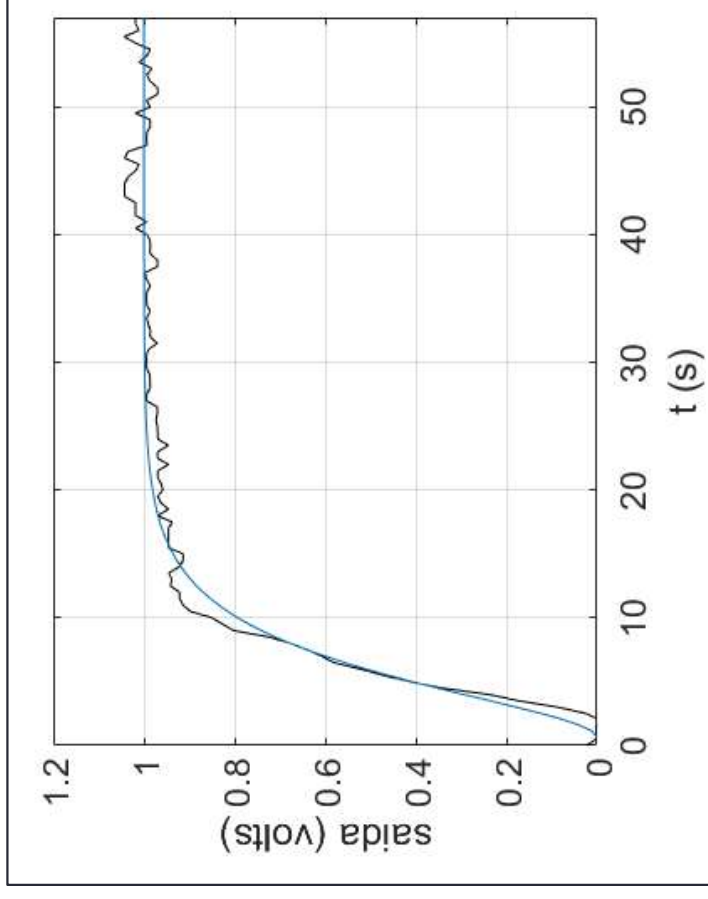
$$\tau_d = m_1 - \tau_1 - \tau_2$$



# Método de Sundaresan – Caso Sobreamortecido

- **RESULTADO INICIAL:**

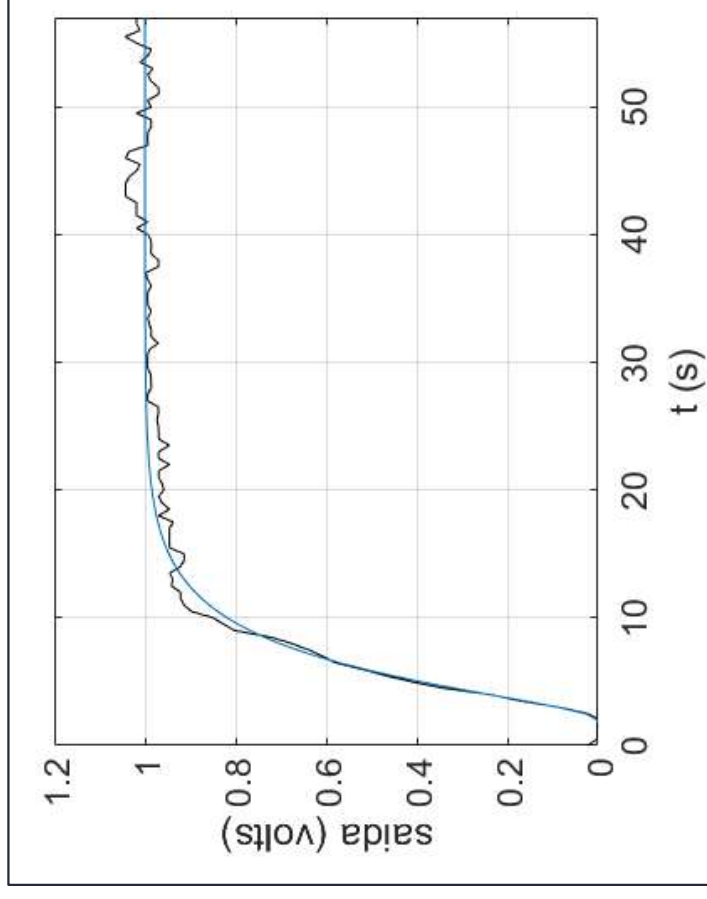
Necessita ajuste dos parâmetros



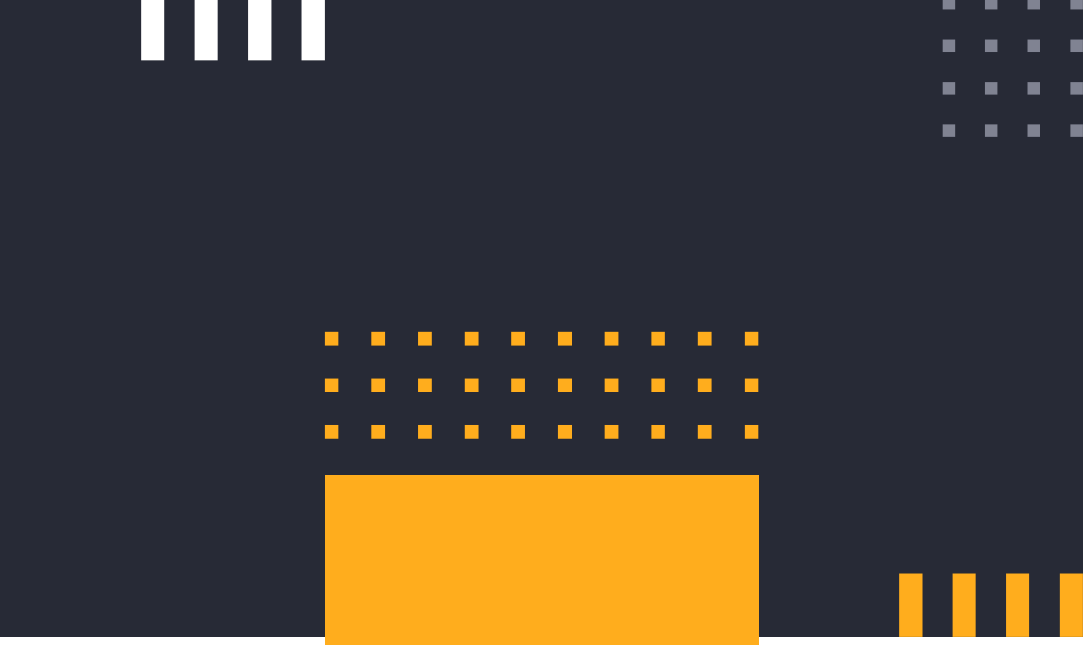
# Método de Sundaresan – Caso Sobreamortecido

- **RESULTADO FINAL:**

Após ajuste dos  
parâmetros

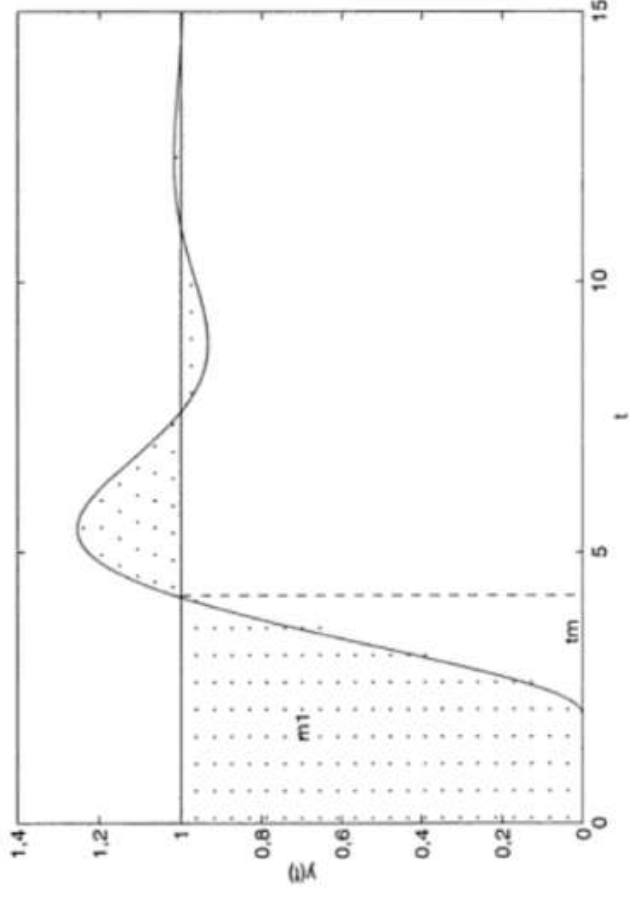


# Método de Sundaresan (Caso Subamortecido)



# Método de Sundaresan – Caso Subamortecido

- Uma resposta ao degrau típica de sistemas subamortecidos é mostrada ao lado.
- Degrau de entrada unitário aplicada em  $t = 0$ .



# Método de Sundaresan – Caso Subamortecido

- Uma resposta ao degrau típica de sistemas de segunda ordem subamortecido é apresentada abaixo:

$$y(t) = \{1 - e^{-\zeta\omega_n(t-\tau_d)}[A]\}u(t - \tau_d), \quad (11)$$

em que:

$$A = \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot \text{sen}\left(\omega_n(t - \tau_d)\sqrt{1-\zeta^2}\right) + \cos\left(\omega_n(t - \tau_d)\sqrt{1-\zeta^2}\right). \quad (12)$$

# Método de Sundaresan – Caso Subamortecido

- Seguindo um procedimento semelhante ao caso anterior, as seguintes equações podem ser obtidas:

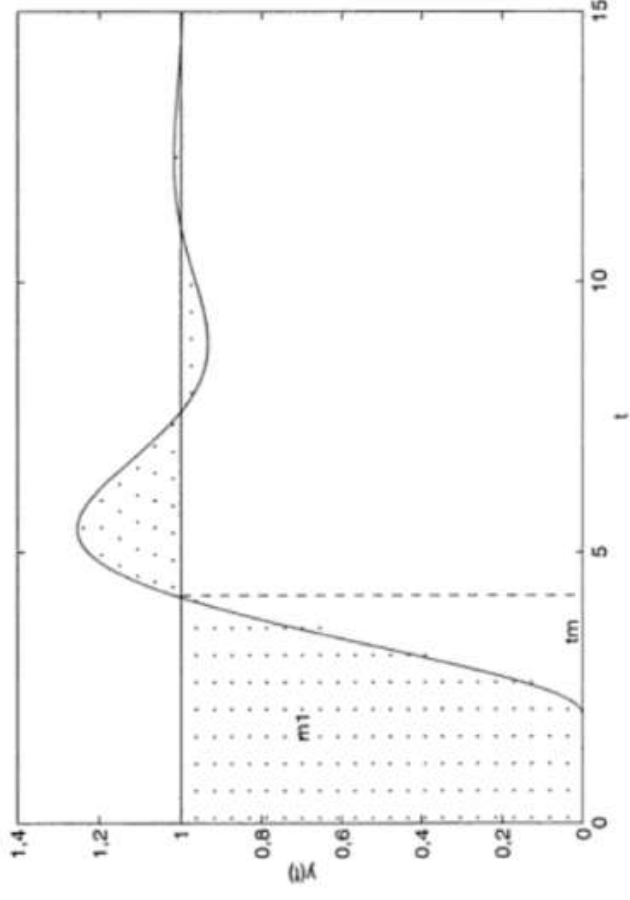
$$\lambda = (t_m - m_1)M_i = \frac{\cos^{-1} \zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta \frac{\cos^{-1} \zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}}, \quad (13)$$

$$\omega_n = \frac{\cos^{-1} \zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \cdot \frac{1}{t_m - m_1} \quad (14)$$

$$\tau_d = m_1 - \frac{2\zeta}{\omega_n} \quad (15)$$

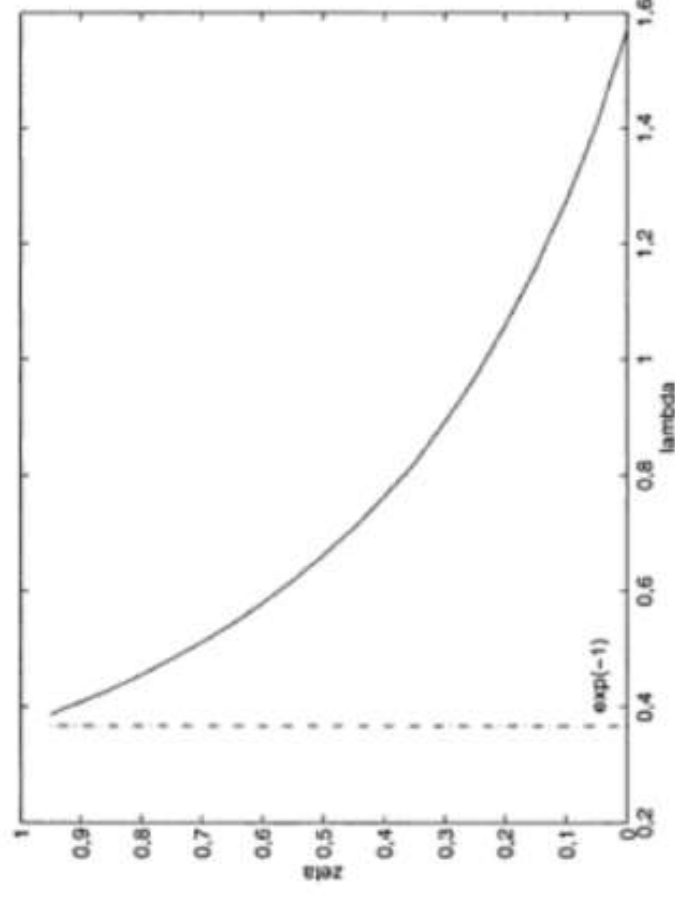
# Método de Sundaresan – Caso Subamortecido

- As equações do slide anterior são utilizadas na determinação dos parâmetros do modelo. Para o caso subamortecido, é importante notar que, no cálculo de  $m_1$ , as áreas acima de  $y(t) = 1$  são consideradas negativas e as áreas abaixo, positivas. Portanto, os valores de  $m_1$  e de  $t_m$  podem ser obtidos graficamente a partir do gráfico ou dos dados medidos:



# Método de Sundaresan – Caso Subamortecido

- A Eq. (13) mostra a relação entre  $\lambda$  e  $\zeta$ . Note que  $\lambda$  é determinado a partir do conhecimento de  $m_1$  e  $t_m$ , obtidos a partir do gráfico da resposta ao degrau, e a partir de  $M_i$ , que é a inclinação da curva no ponto de inflexão.
- Normalmente  $\zeta$  é obtido graficamente a partir de  $\lambda$  utilizando a figura ao lado.



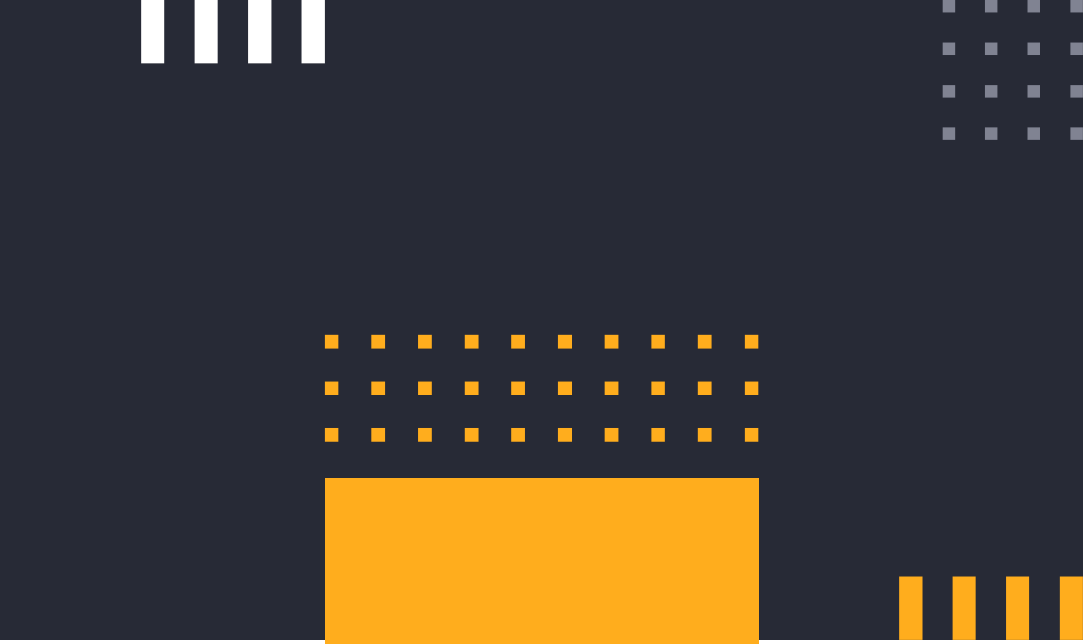
# Método de Sundaresan – Caso Sobreamortecido

## ■ Portanto, o procedimento pode ser resumido da seguinte forma:

1. Determinar o ganho em regime permanente dividindo a variação do sinal de saída pela amplitude do degrau aplicado à entrada;
2. Fazer ajuste de ganho, *offset* e atraso do sinal de entrada;
3. Determinar a área sombreada que chamamos de  $m_1$ . A área acima de  $y(\infty)$  deve ser subtraída;
4. Determinar a inclinação da tangente no ponto de inflexão de  $y(t)$ . Este valor é  $M_i$ ;
5. Determinar  $t_m$  que é a interseção da tangente com o valor em regime permanente de  $y(t)$ . Esse tempo, na prática, pode ser aproximado utilizando a interseção da resposta  $y(t)$  com o valor em regime permanente;
6. Determinar  $\lambda$  a partir da equação:  $\lambda = M_i(t_m - m_1)$ ;
7. Determinar  $\zeta$  a partir do gráfico apresentado no slide anterior;
8. Finalmente, determinar  $\omega_n$  e  $\tau_d$  como se segue:

$$\omega_n = \frac{\cos^{-1} \zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot \frac{1}{t_m - m_1}$$

$$\tau_d = m_1 - \frac{2\zeta}{\omega_n}$$



# *System Identification Toolbox*

# Suporte ao Aluno



## e-mail:

■ [rafael.cavalcantinetto@ufpe.br](mailto:rafael.cavalcantinetto@ufpe.br)

