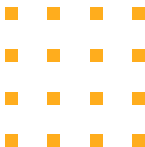


Prática 01

Caracterização Dinâmica e Estática de Sistemas



Disciplina: Laboratório de Engenharia de Controle
Professor: Rafael Cavalcanti Neto



Objetivos

- Modelar a estrutura mecânica do ensaio de empuxo
- Representar um sistema de ordem zero por ganho estático linear e não-linear
- Estimar parâmetros com *polyfit*
- Identificar um filtro passa-baixas por resposta ao degrau e em frequência
- Comparar o modelo do MATLAB com o osciloscópio





Atividade 1

Empuxo de um motor CC com hélice



Descrição do Experimento

- **Objetivo:** estimar o empuxo de um motor CC com hélice em função da tensão de alimentação.
- A haste gira em torno de um pivô; a balança mede a força normal N a uma distância L_1 e o motor fica em L_2 .
- A balança foi **tarada** com o motor desligado: o peso da estrutura é desprezado.

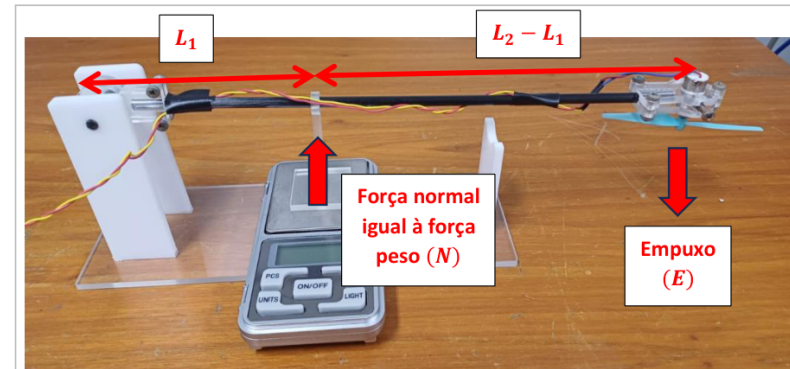


Figura 1 – Experimento para medir o empuxo (roteiro da Prática 01).

Dados do Ensaio

- **Tabela 1:** peso medido na balança para cada tensão aplicada ao motor.

V (V)	N (N)	V (V)	N (N)	V (V)	N (N)	V (V)	N (N)
0,1	0,0055	0,6	0,0352	1,2	0,1655	2,2	0,4817
0,2	0,0046	0,7	0,0537	1,4	0,2247	2,4	0,5677
0,3	0,0037	0,8	0,0731	1,6	0,2802	2,6	0,6463
0,4	0,0083	0,9	0,0907	1,8	0,3412	2,8	0,7194
0,5	0,0203	1,0	0,1147	2,0	0,4124	3,0	0,7961

L_1	L_2	g
$\approx 9,5 \text{ cm}$	$\approx 27,5 \text{ cm}$	$\approx 9,8 \text{ m/s}^2$

Modelagem da Estrutura Mecânica

- **Hipótese:** haste como corpo rígido em equilíbrio, com pivô na extremidade esquerda.
 - N : força normal da balança (para cima), a L_1 do pivô;
 - E : empuxo do motor com hélice (para baixo), a L_2 do pivô;
 - R : reação do pivô — braço nulo, não entra no somatório.
- Somatório dos torques em relação ao pivô:

$$\sum \tau_o = 0 \Rightarrow N L_1 - E L_2 = 0 \Rightarrow E = \frac{L_1}{L_2} N \approx 0,345 N$$

- A coluna “Peso” já está em newtons: a conversão é feita ponto a ponto e E é usado nos ajustes.

Ganho Estático Linear e Não-Linear

- Sistema de **ordem zero**: sem armazenamento de energia, a relação $E = f(V)$ é algébrica e só o regime permanente é modelado.

$$k = \frac{\Delta E}{\Delta V}$$

- **Ganho estático linear** ($E = kV + b$): usar quando a curva é praticamente uma reta na faixa de operação. Simples; bom para controle em torno de um ponto de operação.
- **Ganho estático não-linear** ($k(V) = dE/dV$ varia): usar quando há curvatura, zona morta ou saturação, ou faixa de operação ampla. Mais fiel; indicado para simulação.

A Sensibilidade Não É Constante

- Inclinação média $\Delta E/\Delta V$ calculada da Tabela 1:

Faixa	0,5 a 1,0 V	1,0 a 2,0 V	2,0 a 3,0 V
$\Delta E/\Delta V$	$\approx 0,07 \text{ N/V}$	$\approx 0,10 \text{ N/V}$	$\approx 0,13 \text{ N/V}$

- O ganho **cresce** com a tensão: a curva tem curvatura.
- Abaixo de 0,5 V as leituras são praticamente nulas: **zona morta**.
- Logo, espera-se que o modelo não-linear represente melhor a faixa completa.

Estrutura dos Modelos

- **Modelo linear:** polinômio de grau 1, dois parâmetros.

$$\hat{E}(V) = a_1 V + a_0 \quad a_1 \text{ em N/V (ganho), } a_0 \text{ em N (deslocamento)}$$

- **Modelo não-linear:** polinômio de grau 2.

$$\hat{E}(V) = c_2 V^2 + c_1 V + c_0$$

- O empuxo de uma hélice cresce com o **quadrado da rotação**, e a rotação do motor CC cresce com a tensão: curva parabólica.
- O grau 3 reduziu pouco o erro, à custa de mais um parâmetro.

Estimação com polyfit

- *polyfit*(*x*, *y*, *n*) ajusta um polinômio de grau *n* pelo método dos **mínimos quadrados**:

$$J = \sum_i (y_i - p(x_i))^2 \rightarrow \min \quad \Leftrightarrow \quad A c \approx y$$

- *A* é a matriz de Vandermonde dos pontos x_i e *c* o vetor de coeficientes.

```
V = [0.1:0.1:1.0, 1.2:0.2:3.0];  
N = [0.0055 0.0046 0.0037 0.0083 0.0203 0.0352 0.0537 0.0731 0.0907 0.1147 ...  
      0.1655 0.2247 0.2802 0.3412 0.4124 0.4817 0.5677 0.6463 0.7194 0.7961];  
E = N*9.5/27.5;           % empuxo (N)  
p1 = polyfit(V, E, 1);    % modelo linear  
p2 = polyfit(V, E, 2);    % modelo nao-linear
```

Resultados dos Ajustes

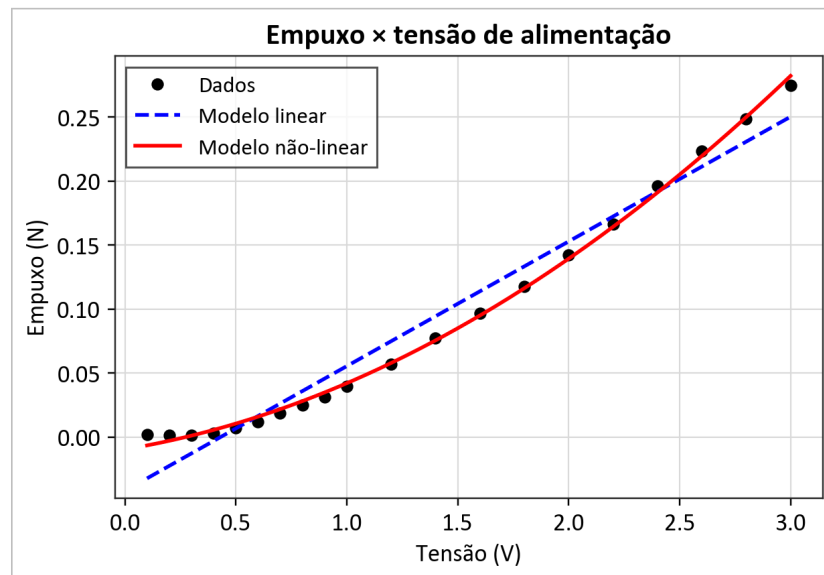
■ Parâmetros:

$$\hat{E}_{lin} = 0,0974 V - 0,0419$$

$$\hat{E}_{nl} = 0,0228 V^2 + 0,0289 V - 0,0095$$

Modelo	RMS	Máx.	R^2
Linear	0,0158	0,0341	0,968
Grau 2	0,0037	0,0083	0,998

Erros em newtons.



Comparação das Curvas

- **Modelo linear:** aproximação razoável, mas erra nas extremidades.
 - Prevê empuxo negativo em tensões baixas ($\approx -0,03$ N em 0,1 V);
 - Subestima o empuxo nas tensões altas, onde a curva é mais inclinada.
- **Modelo não-linear:** acompanha a curvatura em toda a faixa, com erro cerca de **quatro vezes menor**.
- Nenhum dos dois reproduz a zona morta abaixo de 0,5 V: seria preciso um modelo por partes ou restringir a faixa de uso.
- **Conclusão:** linear para faixa estreita; não-linear para 0,1 a 3,0 V.

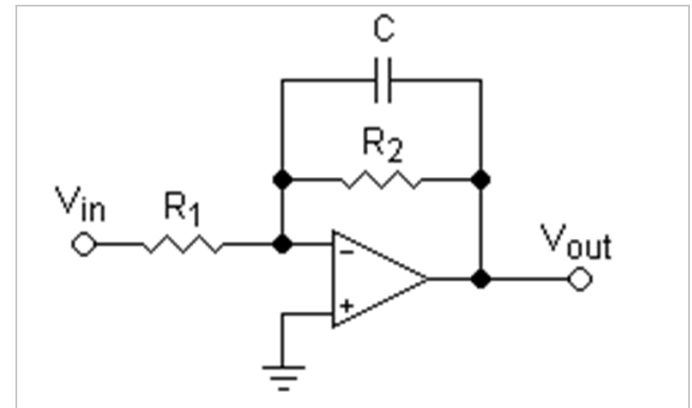


Atividade 2

Identificação de um filtro passa-baixas

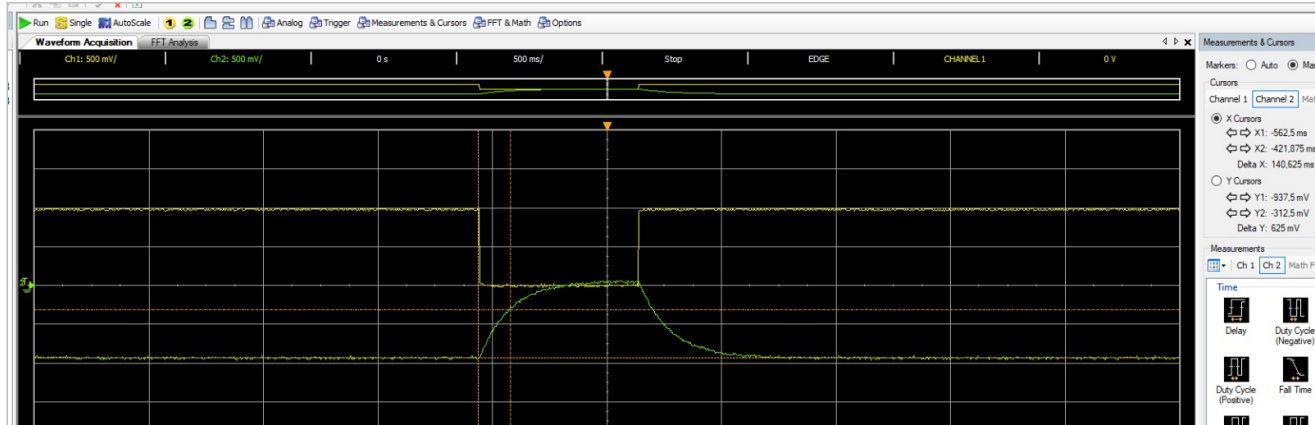
O Circuito

- Amplificador operacional **inversor**: R_1 na entrada e $R_2 \parallel C$ na realimentação.
- **Meta:** levantar o ganho e a frequência de corte do filtro.
- **Itens:**
 1. Coleta de dados (degrau e frequência);
 2. Representação matemática;
 3. Estrutura do modelo;
 4. Estimação dos parâmetros;
 5. Comparação MATLAB × osciloscópio.



Coleta: Resposta ao Degrau

- Com os cursores do osciloscópio, o tempo para a saída atingir **63,2%** da variação total foi de 0,1406 s.
- Os pontos de 50% a 90% dão, pelo mesmo cálculo, τ entre 0,12 e 0,14 s.



Coleta: Resposta em Frequência

- Senoides de $V_{in} \approx 1 V_{pp}$ de 0,3 a 20 Hz; mede-se V_{out} e a defasagem.

$$|G| = \frac{V_{out}}{V_{in}} \quad |G|_{dB} = 20 \log_{10} |G|$$

f (Hz)	0,3	0,4	0,5	1,0	1,3	1,4	2,0	5,0	10	20
G	0,984	0,969	0,935	0,774	0,677	0,672	0,524	0,275	0,159	0,111
Fase (°)	165	161	160	140	130	129	119	106	83	45

- Baixa frequência: ganho ≈ 1 e fase $\approx 180^\circ$. Acima de 2 Hz o ganho cai: **passa-baixas inversor**.

Estrutura do Modelo

- **Representação:** função de transferência em tempo contínuo.
- Impedância de realimentação e ganho do inversor:

$$Z_f = R_2 \parallel \frac{1}{sC} = \frac{R_2}{1 + sR_2C} \quad G(s) = -\frac{Z_f}{R_1} = -\frac{R_2/R_1}{R_2C s + 1}$$

$$\boxed{G(s) = \frac{K}{\tau s + 1}} \quad K = -\frac{R_2}{R_1}, \quad \tau = R_2C, \quad f_c = \frac{1}{2\pi\tau}$$

- **Primeira ordem:** um único armazenador de energia (o capacitor), logo um polo.
- $K < 0$ é a inversão do AmpOp e explica a fase de $\approx 180^\circ$; sem zero, sem sobressinal.

Estimação dos Parâmetros

- **Ganho:** nas frequências baixas, $|K| \approx 0,98$ a $1,0$.
- **Degrau:** $\tau \approx 0,14$ s (cursor de 63,2%).
- **Bode:** mínimos quadrados de $|G(f)| = |K|/\sqrt{1 + (2\pi f\tau)^2}$ (em dB) nos pontos até 5 Hz:

$$|K| \approx 1,01 \quad \tau \approx 0,123 \text{ s} \quad f_c \approx 1,30 \text{ Hz}$$

- Os dois métodos diferem $\approx 12\%$ em τ , razoável para leitura de cursor.

$$G(s) \approx \frac{-1,01}{0,123 s + 1}$$

Pontos Fora do Ajuste

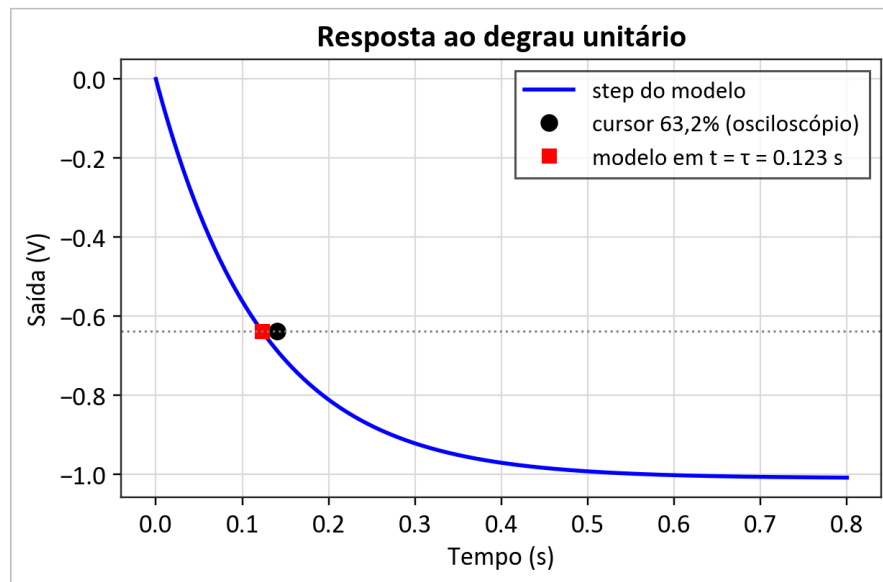
- Os pontos de **10 e 20 Hz** não entraram no ajuste:
 - a saída é pequena ($\approx 0,1 V_{pp}$) e a leitura é menos precisa;
 - a fase passa de 90° de atraso (45° em 20 Hz, partindo de 180°), o que um sistema de primeira ordem **não produz**.
- Isso indica **dinâmica extra** não modelada, como a limitação em frequência do amplificador.
- Incluindo esses pontos: $\tau \approx 0,087$ s e $f_c \approx 1,8$ Hz — pior em baixa frequência e inconsistente com o degrau.

Modelo no MATLAB

```
K = -1.01; tau = 0.123;  
G = tf(K, [tau 1]);
```

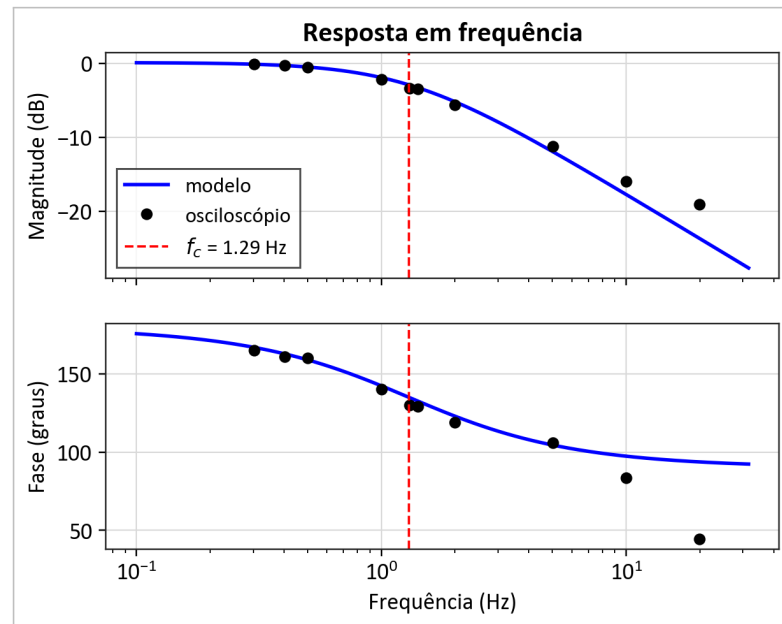
```
figure; step(G); grid on  
figure; bode(G); grid on
```

- Para comparar, plote os pontos medidos sobre o Bode (*semilogx*).
- Em $t = \tau$ a saída do modelo vale $0,632 K$.



Comparação com o Osciloscópio

- **Degrau:** modelo atinge 63,2% em 0,123 s, contra 0,141 s no cursor (≈ 18 ms).
- **Frequência:** erro $< 0,5$ dB até 5 Hz; acima disso a fase medida cai mais que os 90° do modelo.
- **No corte:** ganho $0,707 |K|$ (-3 dB) e fase 135° .



Conclusões

- **Atividade 1:** o empuxo é $E \approx 0,345 \text{ N}$; o modelo de grau 2 representa toda a faixa ($R^2 = 0,998$), o linear só uma faixa estreita.
- **Atividade 2:** o filtro é um passa-baixas inversor de 1ª ordem com

$$|K| \approx 1 \quad f_c \approx 1,3 \text{ Hz}$$

- Degrau e Bode concordam até 5 Hz; acima disso há dinâmica não modelada.
- R_1 , R_2 e C não foram medidos: identificaram-se K e τ . Com $|K| \approx 1$, espera-se $R_2 \approx R_1$ e $C = \tau/R_2$.

Aluno

e-mail:

- luan.cesarn@ufpe.br