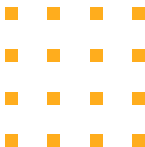


Prática 02

Modelagem Caixa-Branca, Caixa-Cinza e Polo Dominante

Disciplina: Laboratório de Engenharia de Controle
Professor: Rafael Cavalcanti Neto



Objetivos

- Modelar o circuito TF1 como caixa-cinza
- Modelar a cascata TF2–TF3 como caixa-branca
- Comparar simulação, circuito físico e modelo no MATLAB
- Avaliar se a cascata TF1–TF2 pode ser representada pelo polo dominante

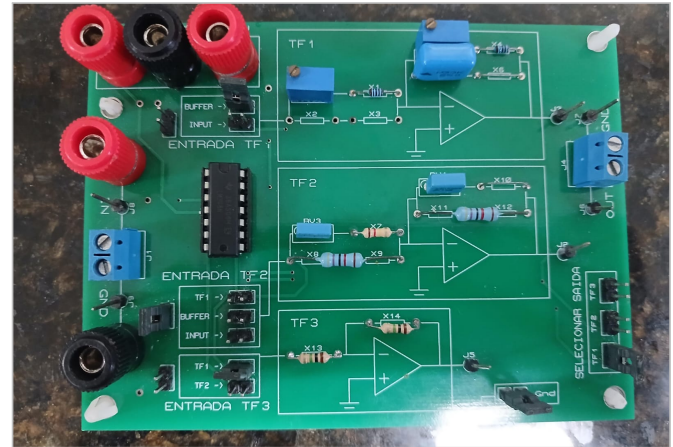


Kit Didático 01

- Três estágios com AmpOp: **TF1**, **TF2** e **TF3**, selecionáveis por *jumpers*.
- **Convenção:** em toda a prática

$$G(s) = \frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)}$$

- Aquisição pelo osciloscópio em CSV (separador “;”, decimal “,”).
- Entrada em onda quadrada: cada borda é tratada como um degrau.



Placa didática usada na bancada.



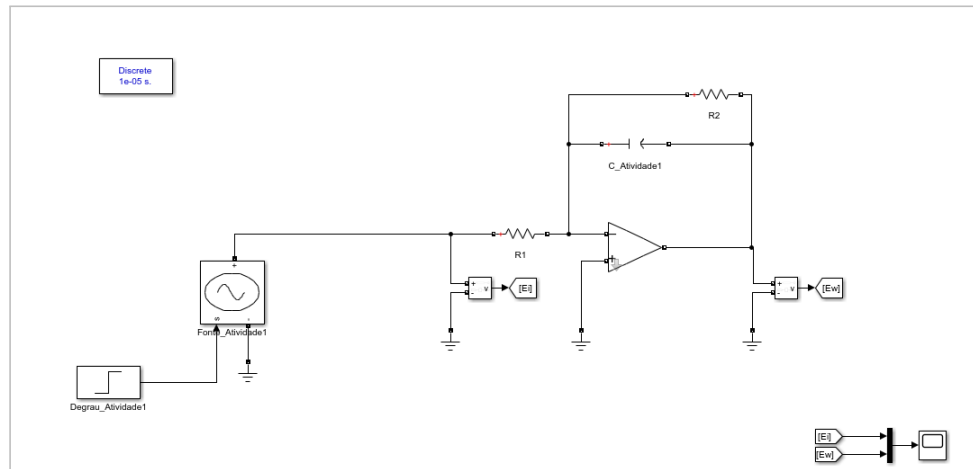
Atividade 1

Circuito TF1 – modelo caixa-cinza



Caixa-Branca ou Caixa-Cinza?

- **Caixa-cinza:** a topologia é conhecida (inversor com realimentação RC), mas os valores efetivos dos componentes **não foram medidos**.
- A estrutura vem do circuito; K_1 e τ_1 vêm do ensaio.



Modelo do TF1 no Simulink: AmpOp, R_1 , R_2 , capacitor e medições de entrada e saída.

Equacionamento do TF1

- **AmpOp ideal:** entrada não inversora aterrada, terra virtual no nó inversor e corrente de entrada nula.
- Impedância de realimentação:

$$Z_{f,1}(s) = R_{f,1} \parallel \frac{1}{C_1 s} = \frac{R_{f,1}}{1 + R_{f,1} C_1 s}$$

- Lei de Kirchhoff das correntes no nó inversor:

$$\frac{V_{in}(s)}{R_{in,1}} + \frac{V_{out}(s)}{Z_{f,1}(s)} = 0$$

$$G_{TF1}(s) = -\frac{Z_{f,1}}{R_{in,1}} = -\frac{R_{f,1}/R_{in,1}}{R_{f,1}C_1s + 1} = \frac{K_1}{\tau_1s + 1}$$

Parâmetros Obtidos Experimentalmente

- Como $C_1 = 330 \text{ nF}$ é conhecido, só K_1 e τ_1 precisam vir do ensaio:

$$K_1 = -\frac{R_{f,1}}{R_{in,1}} \quad \tau_1 = R_{f,1}C_1$$

- **Resposta ao degrau:** $K_1 \approx -1,004058$ e $\tau_1 \approx 0,129323 \text{ s}$.
- Os resistores saem dos parâmetros identificados:

$$R_{f,1} = \frac{\tau_1}{C_1} = \frac{0,129323}{330 \times 10^{-9}} \approx 391,9 \text{ k}\Omega \quad R_{in,1} = \frac{R_{f,1}}{|K_1|} \approx 390,3 \text{ k}\Omega$$

$$G_{TF1}(s) = \frac{-1,004058}{0,129323 s + 1}$$

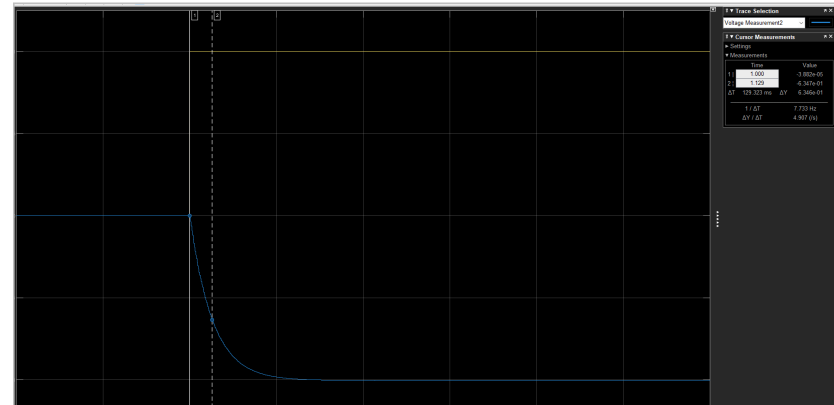
Verificação com Cursores

- Cursor 1: $t_1 = 1,000 \text{ s}$, $V_{out} \approx 0$.
- Cursor 2: $t_2 = 1,129323 \text{ s}$,
 $V_{out} \approx -0,6347 \text{ V}$.

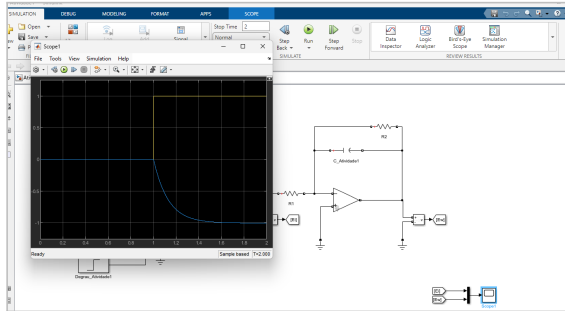
$$\Delta t = 129,3 \text{ ms} = \tau_1$$

- $\Delta Y \approx 0,6346 \text{ V} \approx \mathbf{63,2\%}$ da variação final.
- **Atenção:** $1/\Delta t = 7,733 \text{ Hz}$ é $1/\tau_1$, não a frequência de corte:

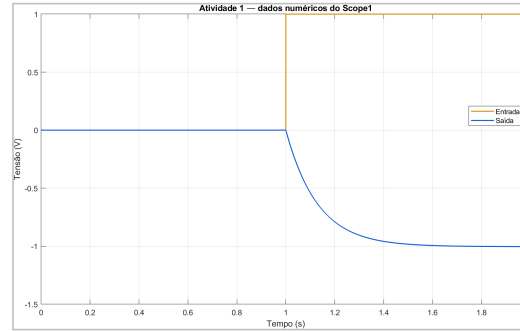
$$f_c = \frac{1}{2\pi\tau_1} \approx 1,23 \text{ Hz}$$



Simulação no Simulink



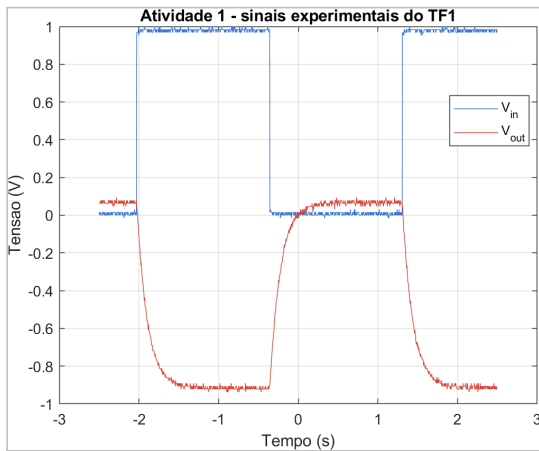
Circuito e *Scope1* do TF1.



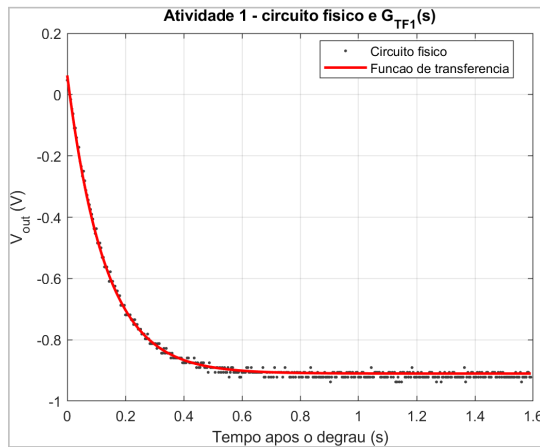
Dados exportados do *Scope1*.

- Degrau de 0 para 1 V em $t = 1$ s; tempo final de 2 s; passo de $10 \mu\text{s}$.
- A saída vai de 0 V a $-1,0036$ V: ganho estático negativo.

Circuito Físico e Modelo no MATLAB



Entrada e saída medidas.



Experimento $\times$ *step* do modelo.

- Entrada: 0 a 0,984 V; saída: 0,063 a -0,92 V.
- Modelo criado com *tf* e resposta com *step*.
- As três respostas concordam: quando a entrada sobe, a saída desce.

Conclusões da Atividade 1

- O TF1 é um **inversor de primeira ordem**:

$$K_1 \approx -1,004 \quad \tau_1 \approx 0,129 \text{ s} \quad f_c \approx 1,23 \text{ Hz}$$

- Estimativa dos componentes a partir de $C_1 = 330 \text{ nF}$: $R_{in,1} \approx 390 \text{ k}\Omega$ e $R_{f,1} \approx 392 \text{ k}\Omega$.
- Simulação, circuito físico e modelo MATLAB têm o mesmo comportamento; a comparação visual mostra boa concordância.



Atividade 2

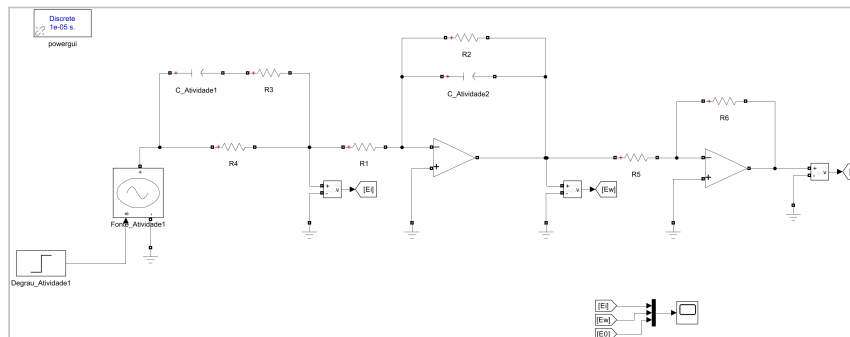
TF2 e TF3 em cascata – modelo caixa-branca



Por Que Caixa-Branca?

- A topologia é conhecida e **todos** os componentes do modelo foram definidos: a FT sai diretamente das impedâncias e das leis de Kirchhoff.
- Nenhum parâmetro é ajustado pela curva experimental.

R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	C_1	C_2
47 k Ω	47 k Ω	120 k Ω	47 k Ω	1 M Ω	1 M Ω	120 nF	33 nF



Equacionamento: Impedâncias

- **1º AmpOp (inversor):** entrada formada por R_2 em série com $R_1 \parallel (R_3 + 1/sC_1)$; realimentação $R_4 \parallel C_2$.

$$Z_4(s) = R_4 \parallel \frac{1}{sC_2} = \frac{R_4}{1 + sR_4C_2} \quad Z_{R_3C_1}(s) = R_3 + \frac{1}{sC_1} = \frac{1 + sR_3C_1}{sC_1}$$

$$Z_3(s) = R_2 + \left[R_1 \parallel \left(R_3 + \frac{1}{sC_1} \right) \right] = \frac{R_1(1 + sR_3C_1) + R_2(1 + sR_3C_1 + sR_1C_1)}{1 + sR_3C_1 + sR_1C_1}$$

Equacionamento: Função de Transferência

- Terra virtual no 1º AmpOp e inversor simples no 2º ($G_{TF3} = -R_6/R_5$):

$$\frac{V_a}{V_i} = -\frac{Z_4(s)}{Z_3(s)} \quad \frac{V_o}{V_a} = -\frac{R_6}{R_5} \quad \Rightarrow \quad \frac{V_o}{V_i} = \frac{R_6}{R_5} \frac{Z_4(s)}{Z_3(s)}$$

- Os dois sinais negativos se cancelam:

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{R_4 R_6 (1 + s R_3 C_1 + s R_1 C_1)}{R_5 (1 + s R_4 C_2) [R_1 (1 + s R_3 C_1) + R_2 (1 + s R_3 C_1 + s R_1 C_1)]}$$

Função de Transferência Numérica

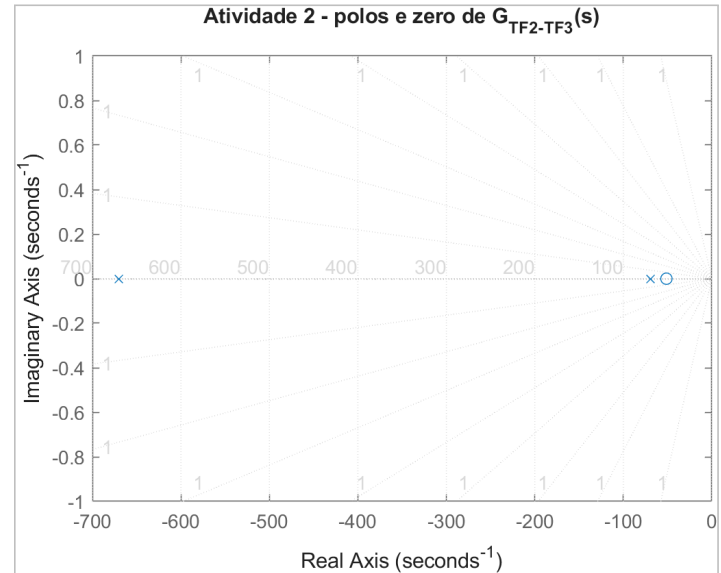
- Forma: dois polos reais e um zero real.

$$G_{23}(s) = K_{23} \frac{\tau_z s + 1}{(\tau_{p1} s + 1)(\tau_{p2} s + 1)}$$

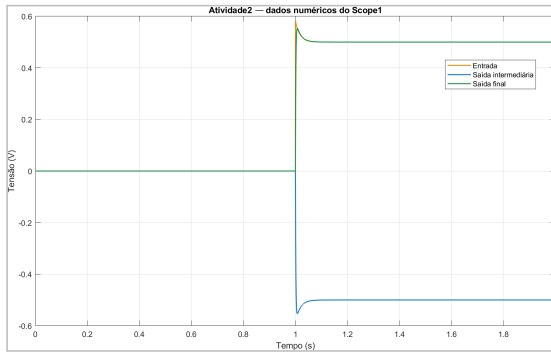
- Substituindo os componentes:

$$G_{WB}(s) = \frac{941,9 s + 47000}{1,05 s^2 + 749,7 s + 47000}$$

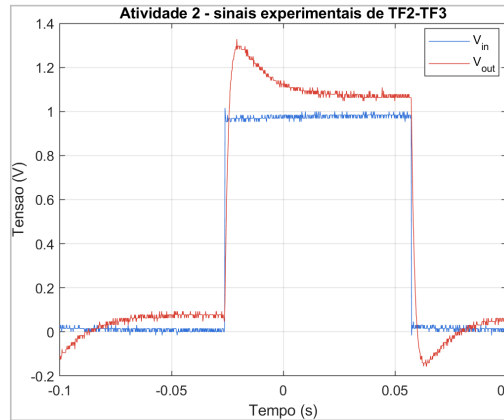
- Polos: $-670,26$ e $-69,28$ rad/s.
- Zero: $-51,31$ rad/s.



Simulação e Circuito Físico



Scope1: entrada, saída intermediária e final.

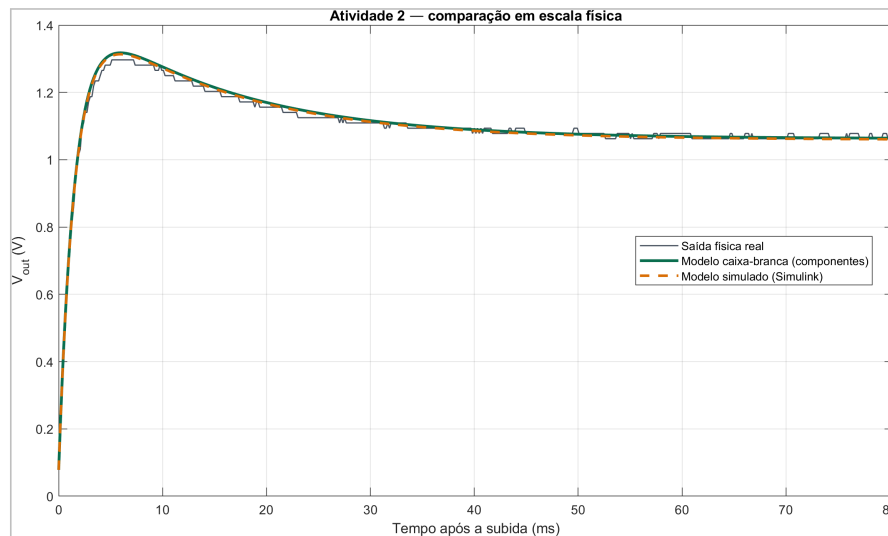


Medição na cascata TF2-TF3.

- **Físico:** parte de 0,078 V, pico de 1,297 V e acomoda em 1,0625 V.
- **Sobressinal de 23,81%** e $t_{s,5\%} = 27,7$ ms.

Comparação das Três Curvas

- Saída física real, resposta de $G_{WB}(s)$ e bloco TF simulado (passo de 0,1 ms), na mesma escala.
- Os dois modelos usam a mesma FT: picos e acomodação praticamente iguais e acompanham a cauda medida.
- **Cuidado:** o *Scope1* com AmpOps dá sobressinal de 10,71%, contra 23,81% no físico — não são equivalentes.



Conclusões da Atividade 2

- A cascata TF2–TF3 é de **segunda ordem** com dois polos reais e um zero real.
- O zero em $-51,31$ rad/s, mais lento que os polos, explica o **sobressinal** mesmo com polos reais.
- A FT caixa-branca reproduz subida, pico e acomodação do circuito físico.
- A simulação com AmpOps confirma polaridade e estabilidade, mas deve ser lida como validação qualitativa do circuito.



Atividade 3

Avaliação do polo dominante



FT da Cascata TF1–TF2

- A Atividade 2 mediu a cascata positiva TF2–TF3. Com a hipótese topológica $G_{TF3} = -1$:

$$G_{TF2} = \frac{G_{TF2-TF3}}{G_{TF3}} = -G_{TF2-TF3} \quad G_{TF1-TF2} = G_{TF1} G_{TF2} = -G_{TF1} G_{TF2-TF3}$$

$$G_{TF1-TF2}(s) = \frac{0,01969 s + 1,0103}{2,785 \times 10^{-6} s^3 + 0,002081 s^2 + 0,14525 s + 1}$$

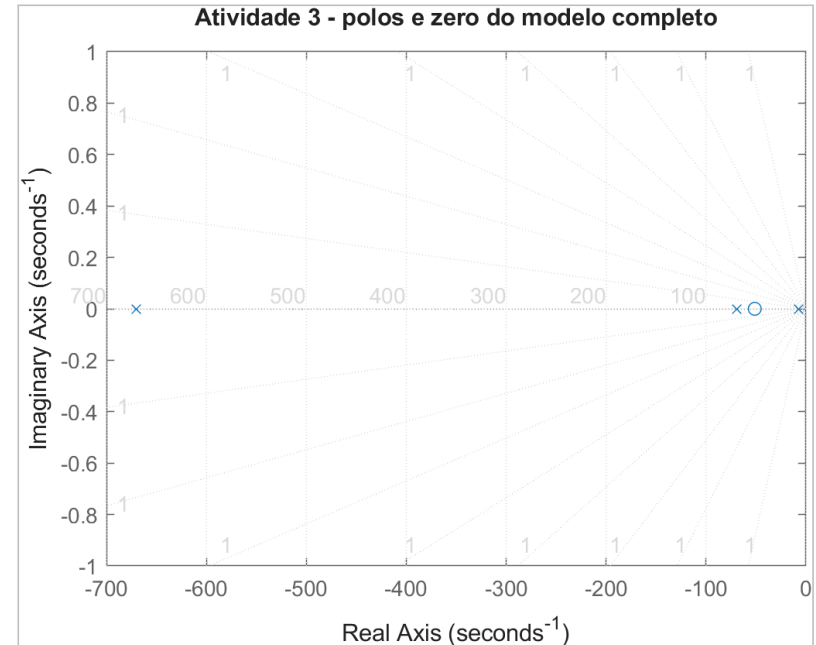
- Polos: $-670,26$, $-69,28$ e $-7,733$ rad/s; zero: $-51,31$ rad/s; ganho DC: 1,0103.

Mapa de Polos e Zeros

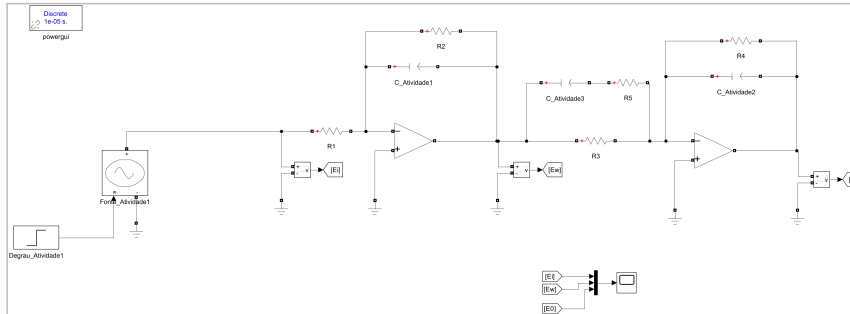
- Todos os polos e o zero são reais e estão no semiplano esquerdo: **estável**.
- O polo mais próximo da origem domina a resposta:

$$p_d = -7,733 \text{ rad/s}$$

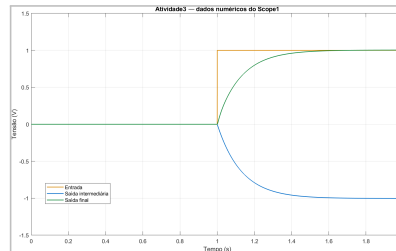
- Separação em relação ao dominante:
 - 2º polo: **8,96 vezes** mais rápido;
 - 3º polo: **86,68 vezes** mais rápido.



Simulação no Simulink



Cascata TF1–TF2 com AmpOps.



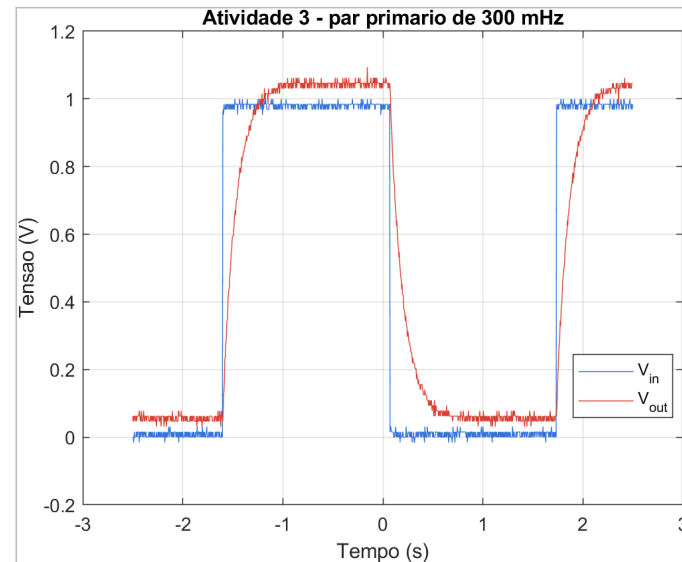
- *Scope1* registrado em três pontos: entrada, saída de TF1 e saída final (200.001 amostras, passo de 10 μ s).
- A saída intermediária coincide com TF1 e a final acompanha o modelo completo.

Circuito Físico

■ Pares de aquisição em 300 mHz e 700 mHz:

Entrada	Saída	Uso
entrada_300mhz	saida_300mHz	primário
entrada2_300mhz	300_out	repetição
entrada_700mhz	out_700mHz	inválido

- Os arquivos de 700 mHz são idênticos: não formam um par.
- Nos seis degraus válidos: ganho mediano 1,0077 e τ mediano 0,1272 s.



Modelo de Ordem Reduzida

- Os polos rápidos têm efeito pequeno no transitório: mantém-se só o **polo dominante**.

$$p_d = -7,733 \text{ rad/s} \quad \tau_d = -\frac{1}{p_d} = 0,129323 \text{ s}$$

- Preserva-se o ganho DC do modelo completo:

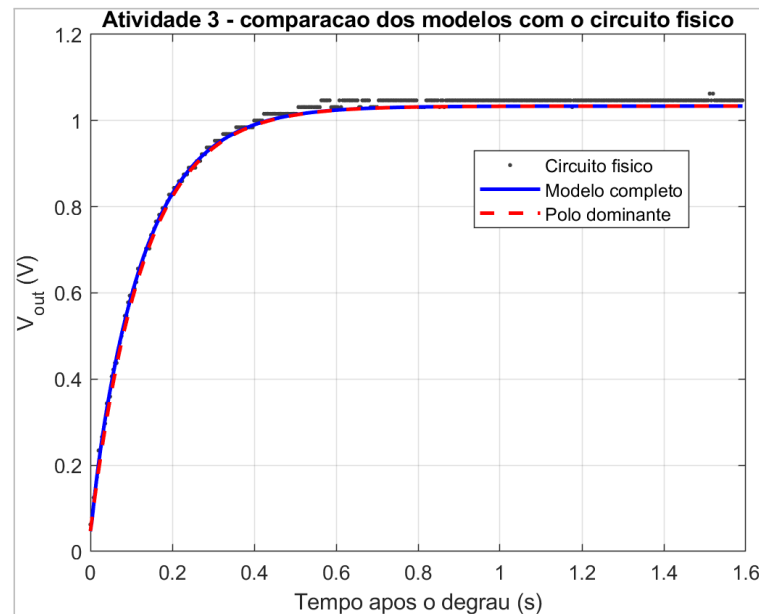
$$G_{red}(s) = \frac{1,010305}{0,129323 s + 1}$$

- τ_d é a própria constante de tempo do TF1: o estágio lento domina a cascata.

Comparação das Quatro Respostas

- Simulação com AmpOps, circuito físico, modelo completo e modelo reduzido.
- O *Scope1* concorda com o modelo completo, sem sobressinal.
- Diferença máxima completo × reduzido (degrau unitário):

$21,29 \text{ mV} \approx 2,11\%$ do valor final



Conclusões e Limitações

- **Atividade 3:** para os degraus de 300 mHz o polo dominante representa bem a cascata (erro de $\approx 2\%$).
- **Limitações:**
 - valores individuais dos componentes não medidos (validação caixa-cinza);
 - $G_{TF3} = -1$ é hipótese pela topologia: confirmar com multímetro;
 - onda quadrada periódica: cada borda analisada como degrau;
 - Atividade 2: simulação com AmpOps (10,71%) não reproduz o sobressinal físico (23,81%).

Conclusão Geral

- **TF1:** inversor de 1ª ordem, $K_1 \approx -1,004$ e $\tau_1 \approx 0,129$ s.
- **TF2–TF3:** 2ª ordem com dois polos reais e um zero que explica o sobressinal.
- **TF1–TF2:** três polos, mas redutível ao polo dominante em baixa frequência.
- Capturas, fotografias, sinais do osciloscópio e gráficos garantem a rastreabilidade experimental do relatório.

Aluno

e-mail:

- luan.cesarn@ufpe.br